# Die Bedeutung des lateinischen Mittelalters für die Entwicklung der Mathematik

Folkerts, Menso

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1986 der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.179-192

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

# Die Bedeutung des lateinischen Mittelalters für die Entwicklung der Mathematik*)

Von **Menso Folkerts,** Universität München

Dieser Vortrag erhebt nicht den Anspruch, eine detaillierte Übersicht über die mathematischen Leistungen des Mittelalters zu geben; es wäre vermessen, dies in so kurzer Zeit versuchen zu wollen. Vielmehr beabsichtigte ich, auf einige Punkte hinzuweisen, an denen die mathematikhistorische Forschung der letzten Jahrzehnte zu neuen Erkenntnissen gekommen ist, und einige summarische Bemerkungen über den Stand der Forschung zu machen. Daber werde ich mich auf Arithmetik und Geometrie beschränken. Zunächst zur Arithmetik.

Die wichtigste arithmetische Schrift, die im frühen Mittelalter im Westen zur Verfügung stand, war die Arithmetik des Boethius [1]. Sie beruht im wesentlichen auf der Arithmetik des Nikomachos und gehört zum Übersetzungsprogramm, mit dem Boethius um 500 das griechische Wissen erhalten wollte. Tatsächlich hat diese Schrift bis in die Neuzeit gewirkt und wurde vor allem auch an Universitäten gelesen; mit über 200 erhaltenen Handschriften gehört sie zu den verbreitetsten mathematischen Texten des Mittelalters. Die Arithmetik des Boethius enthält wesentliche Elemente der pythagoreischen Zahlentheorie, z.B. die Einteilung der (natürlichen) Zahlen in gerade und ungerade, Primzahlen, vollkommene Zahlen; dann die Klassifizierung der Zahlenverhältnisse, wie sie auch in der Musik gebraucht werden; schließlich die Einteilung der Zahlen nach geometrischen Gesichtspunkten, also Polygonal- und Polyederzahlen; ferner die drei Mittel. Das Werk ist also für das praktische Rechnen völlig ungeeignet. Warum wurde es trotzdem so oft kopiert? Ich glaube, daß ein wichtiger Grund zu Beginn des zweiten Kapitels angegeben ist, wenn Boethius sagt: „Alles, was von der ursprünglichen Natur der Dinge aus konstruiert ist, ist offenbar nach dem Verhältnis der Zahlen gebildet; denn dies war das ursprüngliche Vorbild im Geist des Schöpfers". Dieser Gedanke entsprach dem damaligen christlichen Verständnis vom Sinn der Wissenschaft. Er paßte gut zu dem immer wieder zitierten Bibelwort, nach dem Gott alles mit Maß, Zahl und Gewicht geordnet habe [2]. In der Folgezeit entwickelte sich aus der Zahlentheorie des Boethius eine uns sonderbar erscheinende Zahlensymbolik, die den Zahlen einen allegorischen Sinn beilegt. Begriffe wie *mysteria numerorum* oder *numeri sacrati* bezeichnen die geheimnisvolle Verborgenheit des Sinnes und seine Heiligkeit. Indem man die Zahl als allegorisches Zeichen deutet und das Heilige sichtbar macht, kann man das Geheimnis erschließen [3]. Es gibt eine Reihe von Schriften *De numeris*, die in diese Gattung gehören; sie beginnen mit einem Isidor zugeschriebenen Traktat

*) Eine etwas erweiterte Fassung wird in dem Sammelband ‚Wissenschaftsgeschichte heute', Franz Steiner Verlag, Stuttgart, erscheinen.

und reichen bis ins 13. und 14. Jahrhundert [4]. In diesen Texten werden mathematische Inhalte nach Art des Boethius mit Hinweisen auf die Bedeutung der Zahlen in der Bibel verbunden. So wird etwa die Zahl 6 als vollkommen bezeichnet, weil sie gleich der Summe ihrer Teiler ist; andere Zahlen, für die dieses nicht zutrifft, sind aber ebenfalls vollkommen, weil ihre Verwendung in der Bibel dies nahelegt. Dieses unverbundene Nebeneinander von mathematischen Aussagen und biblischer Zahlensymbolik ist für uns schwer verständlich, war aber offenbar während des ganzen Mittelalters unproblematisch. Die große Zahl der Texte und Handschriften, die übrigens noch längst nicht alle ausgewertet sind, zeigen die Verbreitung dieser mathematisch anspruchslosen Traktate. Die Zahl und die Arithmetik dient hier also zur Interpretation der Bibel. Auch die Geometrie hat übrigens bisweilen dieselbe Funktion. So wendet etwa Hugo von St. Victor die Volumenberechnung von Quadern an, um die Größe der Arche Noah zu bestimmen und um zu beweisen, daß wirklich alle Tiere hineingepaßt haben [5].

Ansätze zum praktischen Rechnen enthalten die genannten Texte selbstverständlich nicht. Hier war man auf die schwerfällige römische Zahldarstellung angewiesen. Als Hilfsmittel benutzte man für Multiplikationen die Rechentafel (*calculus*) des Victorius aus der Mitte des 5. Jahrhunderts, die die Vielfachen von 1 bis 50 enthielt [6]. Für die Bruchrechnung standen die unhandlichen römischen Zwölferbrüche zur Verfügung. Die sogenannten Fingerzahlen, die vor allem durch die Darstellung bei Beda bekannt sind [7], dienten wohl nicht zum Rechnen; vielmehr konnte man durch die Fingerhaltungen Zahlen darstellen und sie auf diese Weise merken. Im Klosterbereich bestand ja kaum die Notwendigkeit des praktischen Rechnens. Die wichtigste Anwendung war zweifellos die Bestimmung des Osterfestes (*Computus*). Da dieses auf der Berechnung des ersten Frühlingsvollmonds und des darauffolgenden Sonntags beruht, mußte sowohl der Mondzyklus mit 19 Sonnenjahren oder 235 Mondumläufen berücksichtigt werden als auch der julianische Kalender, in dem sich die Wochentage nach $4 \times 7 = 28$ Jahren wiederholen. Um die Zyklen zu berücksichtigen, mußte man durch 19 und 28 teilen und die Reste bestimmen können. Die mit dem Computus verbundenen Probleme waren spätestens in Bedas Schrift *De temporum ratione* (725) gelöst [8]. Später formalisierte man die Methoden, die für die Berechnung des Osterfestes benutzt wurden, und schuf mnemotechnische Hilfsmittel, die bis zur Verbreitung gedruckter Kalender, d.h. bis etwa 1500, sehr oft kopiert wurden.

Für komputistische Rechnungen war das römische Ziffernsystem völlig ausreichend. Seit dem 10. Jahrhundert konnte man Rechnungen aber auch auf dem Abakus ausführen, dem Rechenbrett mit Spalten, auf das Steine gelegt wurden, die die westarabischen Gobarziffern trugen. Diesen Abakus hat Gerbert benutzt und über das Rechnen auf ihm eine Schrift verfaßt. Neuere Untersuchungen haben allerdings ergeben, daß das Rechenbrett mit gemerkten Steinen schon vor Gerbert in Westeuropa gebraucht wurde [9]. Das Rechnen auf diesem Brett wurde bis in die 1. Hälfte des 12. Jahrhunderts im Klosterbereich gelehrt. Von mindestens neun namentlich bekannten Autoren sind entsprechende Texte erhalten, meist jedoch nur in wenigen Handschriften. Überhaupt scheint es, als ob dieses Rechenbrett außerhalb des Klosterbereichs wenig bekannt war und für die Praxis wohl auch kaum benutzt wurde.

Um die Wende vom 10. zum 11. Jahrhundert wurde nicht nur der „Gerbertsche" Abakus im Klosterbereich eingeführt, sondern auch ein Zahlenspiel, das auf der Arithmetik des Boethius beruht: die sogenannte Rithmimachie. Die Ursprünge dieses Spiels sind erst in allerjüngster Zeit geklärt worden: Unser Jubilar, Herr Borst, hat nachgewiesen [10], daß, ausgelöst durch den Wormser Schulstreit, das Zahlenkampfspiel um 1030 von dem Würzburger Geistlichen Asilo erfunden wurde, und die Geschichte des Spiels in der Folgezeit auf eine sichere Grundlage gestellt. In dem auf Asilo folgenden Jahrhundert entstanden sechs verschiedene Bearbeitungen [11], ehe Fortolf um 1130 die erste ausführliche Zusammenfassung der Spielregeln gab [12]. Durch Herrn Borsts souveränes Wissen, seine Kenntnis aller Quellen und seine überzeugende Interpretation ist jetzt endlich die Unsicherheit beseitigt, die mehr als ein Jahrhundert lang die Wissenschaftsgeschichte beherrschte. Auch im späteren Mittelalter erfreute sich das Spiel großer Beliebtheit, wie zahlreiche bisher ungedruckte handschriftliche Texte aus dem 12. bis 16. Jahrhundert und eine Reihe von gedruckten Arbeiten aus dem 15. bis 17. Jahrhundert beweisen. Ich kann hier auf Einzelheiten nicht eingehen [13] und möchte nur bemerken, daß es ab dem 14. Jahrhundert eine Reihe von Kommentaren und sogar kritische Bemerkungen über den Wert der verschiedenen Regeln gibt. Das Spiel war vor allem im höfischen Bereich sehr beliebt. Daß die Rithmimachie aber auch an Universitäten behandelt wurde, zeigen Handschriften aus Jena aus der Zeit um 1520, die Vorlesungsmitschriften und Notizen eines Krakauer Studenten enthalten, oder die berühmte Handschrift C 80 der Sächsischen Landesbibliothek Dresden mit Vorlesungen aus Leipzig um 1480.

Die Übersetzungen aus dem Arabischen haben auf die Rithmimachie überhaupt keinen Einfluß gehabt. Aber natürlich gaben sie auch der Arithmetik neue Impulse. Wichtig war die Einführung der indisch-arabischen Ziffern und des Rechnens mit ihnen seit der Übersetzung von al-Ḫwārizmīs Arithmetik in der ersten Hälfte des 12. Jahrhunderts. Obwohl die Art der Zahlendarstellung auch für den Handel interessant war, dauerte es Jahrhunderte, ehe sich die neuen Ziffern durchsetzten. Ein Hindernis war die Abstraktheit des Stellenwertsystems und die logische Schwierigkeit, daß die Null, die ja eigentlich „nichts" bedeutet, den Wert einer Ziffer verzehn- oder verhundertfachen kann. In Handschriften des Spätmittelalters findet man sehr oft Tabellen, die den Wert der Ziffern im Stellenwertsystem angeben sollen; nicht selten sind sie fehlerhaft. Auch die Ziffernformen mußten sich durchsetzen. Es gibt in einer Handschrift, die aus der Nähe von Braunschweig stammt [14], eine Deutung der arabischen Zahlzeichen aus dem Jahre 1462, die beginnt: *Unum dat vinger duo treppe sed tria sustert* und endet: *Si vingerken desit, ringelken nichil significabit.* Man benutzt also die Umgangssprache, um die Ziffernformen zu verdeutlichen.

Derartige Hilfen sind aus dem 15. Jahrhundert öfters vorhanden, als es offenbar darum ging, die arabischen Ziffern im Volk durchzusetzen. Schon im 13. und 14. Jahrhundert hatte man – wohl in derselben Absicht – zahlreiche Algorismen verfaßt, die überwiegend im Universitätsunterricht benutzt wurden. Vor allem die Schriften von Sacrobosco und Alexander de Villa Dei waren ungeheuer verbreitet; der Algorismus des Sacrobosco ist mit mehreren hundert erhaltenen Abschriften der Spitzenreiter unter den westlichen mathematischen Texten des Mittelalters [15]. Die Algorismen lehren bekanntlich neben der Zahldarstellung sechs Grundrechenarten (unsere vier sowie Verdopplung und Halbierung), das Quadrat- und Kubikwurzelziehen und die Reihenlehre. Insofern sind sie nicht so „praktisch", wie man es erwarten würde, und insbesondere für den Kaufmann nur beschränkt verwendbar. Die Zielgruppe waren eben nicht die Händler, sondern die Studenten der Artisten-Fakultät.

Das Rechnen, das die Kaufleute benötigten, wurde durch die Rechenmeister vermittelt, die seit dem 13. Jahrhundert in Italien (als *maestri d'abbaco*) und später auch in Süddeutschland und anderen Teilen Europas wirkten. Sie schrieben üblicherweise nicht in Latein, sondern in den Nationalsprachen und lehrten nicht an den Universitäten, sondern an privaten oder städtischen Rechenschulen [16]. Da über die Rechenmeister hinreichend viel geschrieben wurde, brauche ich hierauf nicht weiter einzugehen. Ich möchte nur erwähnen, daß auch in Rechenbüchern bisweilen Elemente der theoretischen Mathematik vorkommen, und zwar nicht nur bei der Darstellung der Grundlagen des Rechnens, sondern auch in den Beispielen. Mathematische Aufgabensammlungen hat es ja zu allen Zeiten gegeben, und oft waren die Beispiele nicht aus der Praxis genommen, sondern sollten der Unterhaltung dienen und auf diese Weise mathematisches Wissen vermitteln. Die älteste mittelalterliche westliche Sammlung dieser Art sind die Alkuin zugeschriebenen *Propositiones ad acuendos iuvenes*, die im 9. Jahrhundert entstanden [17]. Diese Sammlung steht in der römischen Tradition; daneben sind griechisch-byzantinische und auch schon arabische Einflüsse anzunehmen. Manche Probleme, etwa die Transportaufgaben (darunter das bekannte Problem von Wolf, Ziege und Kohlkopf), begegnen uns hier zum erstenmal. Alkuins *Propositiones* sind nur die älteste von vielen Aufgabensammlungen, die in mittelalterlichen Handschriften überliefert werden. Zwar weichen die Aufgaben in späteren Sammlungen voneinander ab, doch werden gewisse Aufgabentypen gleichsam kanonisch weitergegeben. Diese anonymen Sammlungen waren bis zum Ende des Mittelalters im Klosterbereich beheimatet und verzichteten wohl aus diesem Grund weitgehend auf Probleme aus der Praxis. Viele dieser Probleme fanden Eingang in die Rechenbücher der Rechenmeister und trafen hier auf andere Beispiele, die der kaufmännischen Praxis entstammen und etwa Münzlegierungen, Zinsrechnung oder Geldwechsel behandeln [18]. Sogar Rechenbücher der Gegenwart enthalten manche Aufgaben, deren Geschichte sich weit zurückverfolgen läßt.

Jetzt zur Geometrie. Es ist allgemein bekannt, daß nur wenige Schriften mathematischen Inhalts in lateinischer Sprache im frühen Mittelalter verbreitet waren. Dies hängt wesentlich mit dem geringen Interesse der Römer an wissenschaftlicher Mathematik zusammen, aber auch damit, daß man im täglichen Leben mit einem Minimum an arithmetischen und geometrischen Kenntnissen auskam. Relativ verbreitet waren im Mittelalter die Schriften der römischen Feldmesser (Agrimensoren) [19], von denen einige auch geometrische Anweisungen enthalten. Eine dieser Schriften lehrt anhand von Zahlenbeispielen, wie die verschiedenen Dreiecke, Vierecke, Polygone und der Kreis berechnet werden, wobei außer Fläche und Umfang auch die Höhe und Höhenabschnitte interessieren. Die Lösungen werden, ähnlich wie bei den Babyloniern, in

Rezeptform gegeben; jedoch ist es immer möglich, aus den Zahlenwerten das Lösungsverfahren zu finden. Die Aufgaben sind nur zum kleinen Teil Probleme, die im täglichen Leben zu lösen sind. Sie reflektieren vielmehr auf einem niedrigen Niveau das griechische Wissen von der Lösung quadratischer Gleichungen und die pythagoreische Theorie der figurierten Zahlen, also theoretische mathematische Inhalte. Somit vermitteln also auch die Schriften der Agrimensoren nicht nur die praktische Mathematik, die der Feldmesser benötigte, sondern auch theoretische Kenntnisse.

Die Überlieferungsgeschichte des *Corpus agrimensorum* im frühen Mittelalter ist inzwischen weitgehend erforscht. B.L. Ullman hat 1964 gezeigt [20], daß praktisch alle geometrischen Texte im 7./8. Jahrhundert in Corbie gesammelt wurden und z.T. dort entstanden. Welche Absicht verfolgten die unbekannten Mönche, die in Corbie diese geometrischen Texte kopierten oder selbst zusammenstellten? Ullman hat – wie ich glaube, überzeugend – nachgewiesen, daß die mathematischen Schriften der Agrimensoren nicht primär deshalb überlebten, weil sie für die Unterrichtung der künftigen Feldmesser erforderlich waren, sondern vielmehr, weil man sie als Quelle für das geometrische Material gebrauchte, das man für den Unterricht im Quadrivium benötigte. In dieser Hinsicht unterscheiden sich diese Traktate also von anderen technischen Abhandlungen etwa über Medizin oder Landbau, die in der Praxis benutzt wurden.

Einer der wichtigsten geometrischen Texte vor dem 12. Jahrhundert ist Gerberts Geometrie. Der ursprüngliche Umfang dieser nur fragmentarisch erhaltenen Schrift läßt sich nicht sicher angeben. Eine sorgfältige Analyse des Werks steht noch aus, obwohl es seit fast 100 Jahren gut ediert ist [21]. Es enthält Versuche, die geometrischen Grundbegriffe zu erläutern, geht dann auf die verschiedenen Maße und ihre Umrechnungen ein, wendet sich danach den Arten der Winkel zu, wobei Material des Euklid verarbeitet ist, und legt schließlich dar, wie man Dreiecke und Vierecke berechnet. In diesem letzten erhaltenen Teil ist agrimensorisches Wissen benutzt. Gerbert bemüht sich, die Zusammenhänge klar darzustellen; sein didaktisches Bestreben ist überall erkennbar. Offenbar sollte auch diese Schrift keine direkte Gebrauchsanweisung für den Praktiker sein, sondern sie war als Lehrbuch der Geometrie an den Klosterschulen gedacht. Sie dürfte von Gerbert selbst an der Schule in Reims, die er zeitweise leitete, benutzt worden sein.

In den Handschriften der Gerbert zugeschriebenen Geometrie findet man Hinweise auf geometrische Diskussionen, die Anfang des 11. Jahrhunderts unter Lothringer Gelehrten geführt wurden. Es geht um die Frage nach der Winkelsumme im Dreieck und nach der Definition von Innen- und Außenwinkel. Zeitweise wird der Innenwinkel mit dem spitzen und der Außenwinkel mit dem stumpfen Winkel identifiziert; dies wirft Licht auf den schlechten Zustand des Euklidtextes. Dieser sogenannte Winkelstreit wird in der Korrespondenz zwischen einem Lütticher (Radulph) und einem Kölner Mönch (Regimbold) behandelt, die um 1025 geführt wurde und teilweise erhalten ist [22]. Die Diskussion um das Wesen der Winkel im Dreieck wird erst etwas später mit einem Text beendet, der in nur einer Handschrift überliefert ist [23]. In ihm werden durch Ausschneiden und Aufeinanderlegen die wichtigsten Sätze über Gleichheit und Summe von Winkeln sozusagen experimentell bewiesen. Dieser anonyme Text wiederum war ebenso wie Gerberts Geometrie einem Lütticher Mönch namens Franco bekannt, der um 1045 eine Abhandlung zur Kreisquadratur schrieb [24]. Diese Schrift enthält außer einem guten Iterationsverfahren zur Quadratwurzelbestimmung mathematisch nichts Neues und geht insbesondere natürlich nicht über Archimedes hinaus. Interessant ist die Arbeit vor allem deshalb, weil man erkennt, welche geometrischen Probleme damals im Klosterbereich behandelt wurden.

Es gab in der ersten Hälfte des 11. Jahrhunderts also eine Gruppe von lothringischen Gelehrten, die sich vor allem mit geometrischen Fragen beschäftigten. Diese Zusammenhänge sind erst in den letzten Jahrzehnten nachgewiesen worden. Sozusagen der Ahnherr dieses Kreises war Gerbert.

Die genannten Texte sind die wichtigsten geometrischen Arbeiten, die dem frühen Mittelalter zur Verfügung standen. Ich hoffe, gezeigt zu haben, daß sie trotz einiger Inhalte, die für den Praktiker verwertbar erscheinen, im wesentlichen dem Unterricht im Quadrivium dienten. Dies ist nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, daß sie in Klöstern verfaßt oder kopiert wurden. Sie enthalten aber auch das Wissen, das für den Praktiker, d.h. den Landvermesser, erforderlich war: so die Umrechnung der Maße und elementare Flächenbestimmungen. Welches zusätzliche Material dem praktischen Geometer zur Verfügung stand, läßt sich aus den erhaltenen geometrischen Texten nicht ermitteln.

Für die mittelalterliche westliche Mathematik bedeutet das 12. Jahrhundert einen Wendepunkt, jenes Jahrhundert, in dem durch die Übersetzungen aus dem Arabischen fast schlagartig eine riesige Menge neuen Wissens zur Verfügung gestellt wurde. Im Grunde genommen, war es eigentlich kein neues Wissen, sondern größtenteils die Werke der Griechen, daneben in geringerem Umfang indische und original arabische Arbeiten. Hier genügt der Hinweis, daß nach der Rückeroberung Toledos (1085) in diesem und anderen Teilen Spaniens eine Reihe von Übersetzern und Kompilatoren ihre Tätigkeit begann. Gelehrte aus ganz Europa arbeiteten zusammen; oft wurden sie unterstützt von Juden oder konvertierten Arabern. Namen wie Gerhard von Cremona, Adelard von Bath, Robert von Chester, Hermann von Kärnten und Plato von Tivoli unterstreichen den internationalen Charakter dieser Bewegung.

Durch die Übersetzungen wurden auch die wichtigsten geometrischen Texte der Griechen wieder in Westeuropa zugänglich. An erster Stelle sind hier Euklids *Elemente* zu nennen, von denen bis etwa 1120 nur Teile der ersten fünf Bücher (ohne Beweise) bekannt waren. Im 12. Jahrhundert wurden die *Elemente* mindestens viermal komplett übersetzt und oftmals bearbeitet. Auch einige arabische Kommentare zu Euklid wurden ins Lateinische übertragen [25]. Von Archimedes' Schriften wurden im 12. Jahrhundert im Westen die Kreismessung und Teile seiner Abhandlung über Kugel und Zylinder bekannt; dazu kommen einige Texte, die archimedisches Material benutzen [26]. Eine fast vollständige Archimedes-Übersetzung aus dem Griechischen, die Wilhelm von Moerbeke 1269 verfaßte, war nicht sehr verbreitet. Marshall Clagett hat in den letzten Jahrzehnten in seinem monumentalen *Archimedes in the Middle Ages* praktisch alle Zeugen der Archimedes-Benutzung im Mittelalter bis zum 16. Jahrhundert gesammelt, die Texte ediert und interpretiert [27]. Versucht man, hinter der Fülle seiner Informationen etwas Allgemeineres zu finden, so kann man zumindest feststellen, daß die mittelalterlichen Kopisten und Bearbeiter des Archimedes primär mit Verständnisschwierigkeiten zu kämpfen hatten. Sie bemühten sich, die logische Struktur der Beweise zu erkennen, und ergänzten oftmals unter Benutzung von Euklids *Elementen* Zwischenschritte, die Archimedes stillschweigend voraussetzte. Beispielsweise verwendet Archimedes, wenn er die Exhaustionsmethode benutzt, implizit Eigenschaften der Stetigkeit, die Konvergenz von Reihen und die Existenz von Proportionalen. Die westlichen Kommentatoren geben diese Voraussetzungen explizit an, indem sie meist auf Euklid, Buch 5 und 10, verweisen. Die wenigen Wissenschaftler, die Archimedes im späten Mittelalter verstanden, haben ihn jedenfalls nicht benutzt, um selbständige Leistungen zu erzielen.

Zurück zu Euklid. Ich erwähnte, daß es nicht nur vollständige Übersetzungen, sondern auch Bearbeitungen gab. Worauf kam es den Bearbeitern vor allem an? [28] Das eindrucksvollste Charakteristikum der lateinischen Bearbeitungen besteht nicht darin, daß Teile fehlen oder falsch verstanden sind, sondern vielmehr in den zahlreichen Zusätzen, die oft die Form ergänzender Sätze oder Voraussetzungen annehmen, die uns aber auch innerhalb der Beweise als Rückbezüge auf andere Sätze begegnen. Als Motiv steht hinter vielen von ihnen das Bestreben, Euklids Werk in didaktischer Hinsicht umzuarbeiten. Der Trend in Richtung auf ein „Lehrbuch“ der *Elemente*, den man schon in der arabischen Epoche und sogar bei Theon von Alexandria feststellen konnte, setzt sich fort. Die Erörterungen über den Aufbau eines Beweises zeugen von dieser verstärkten Didaktik. Man bezeichnet die Abschnitte innerhalb des Beweises, gibt Anhaltspunkte, wie die geforderten Konstruktionen auszuführen oder wie dreidimensionale Figuren zu zeichnen sind, und verweist auf ähnliche Propositionen. Man erkennt auch, wie die strikte Trennwand langsam aufweicht, die die Griechen zwischen Zahl und Größe errichtet haben. Denn das Bestreben, die allgemeinen Sätze aus Buch 5 nicht in den arithmetischen Büchern 7–9 zu verwenden, ist verschwunden, und man kann unzureichende numerische Beweise in Sätzen finden, die sich mit allgemeinen Größen beschäftigen.

Bemerkenswert ist auch die allgegenwärtige Beschäftigung mit Prämissen. Überall, sogar in der Mitte eines Beweises, werden Axiome hinzugefügt, um alle nur denkbaren Lücken in der Beweisführung zu schließen, und man beachtet vor allem die logische Schlüssigkeit. Auch dies paßt gut zu den didaktischen Zielen. Aber diese Bemühungen um grundsätzliche Annahmen dienten nicht nur dazu, die *Elemente* all jenen leichter zugänglich zu machen, die sich in der mittelalterlichen Fakultät der *artes* damit abmühen mußten; sie sollten auch zu Ergebnissen führen, die man auf externe, vor allem philosophische, Probleme anwenden konnte. In dieser Hinsicht die wichtigsten Fragen sind die nach der Inkommensurabilität, nach dem hornförmigen Winkel zwischen Kreisumfang und Tangente und nach der Teilbarkeit von Größen. All diese Ideen beziehen sich letztendlich auf Probleme des Unendlichen und der Stetigkeit, die so oft die Köpfe der mittelalterlichen Philosophen beschäftigten. So lieferten die arabisch-lateinischen Übersetzungen und Bearbeitungen ein Lehrbuch Euklid, das hervorragend zu den scholastischen Interessen paßte, sowohl innerhalb als auch außerhalb der Grenzen der mittelalterlichen Mathematik.

Mit den genannten Problemen, die aus der Beschäftigung mit Euklids *Elementen* erwuchsen, sind die wichtigsten mathematischen Gebiete angegeben, mit denen sich die Wissenschaftler der Scholastik beschäftigten. Sie haben im 14. und 15. Jahrhundert schöpferische Leistungen erbracht, die in manchem über das griechisch-arabische Erbe hinausgingen. Ich kann nur ganz kurz auf einige Ideen hinweisen: In der 1. Hälfte des 14. Jahrhundert stellt der Engländer Thomas Bradwardine in *De continuo* [29] die Frage, ob das Kontinuum sich ohne Ende teilen lasse oder ob es kleinste Teile (Indivisibeln) gebe, wobei es im zweiten Fall noch zu klären ist, ob es endlich oder unendlich viele dieser Atome gibt. Dadurch, daß er eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen von (endlichen oder unendlichen) Mengen herstellt, etwa zwischen den Punkten des Kreisdurchmessers und denen des Halbkreisumfangs, beweist er, daß das Kontinuum nicht aus Atomen besteht. Dabei nimmt er mengentheoretische Paradoxa vorweg. – Die Stelle in Euklids Werk, die den Winkel zwischen Kreisbogen und Tangente (Kontingenzwinkel) betrifft [30], veranlaßte Campanus um 1260 zu einem längeren Exkurs. Er bewies, daß der Kontingenzwinkel kleiner ist als jeder geradlinig begrenzte spitze Winkel, vertrat aber trotzdem die Auffassung, er könne nicht Null sein. Unter dieser Annahme konnte Campanus den sogenannten Zwischenwertsatz widerlegen, der seit den Griechen vor allem in Verbindung mit der Kreisquadratur benutzt wurde und der besagt, daß eine stetige Größe, die von einem kleineren zu einem größeren Wert übergeht, auch sämtliche Zwischenwerte durchläuft. Dieses Problem wurde bis zum 17. Jahrhundert heiß diskutiert. – In Verbindung mit der Proportionenlehre in Buch 5 bzw. 7 der *Elemente* legte Bradwardine im *Tractatus de proportionibus* [31] ausführlich die Lehre von den zusammengesetzten Proportionen dar. Seine Absicht war, den Zusammenhang zwischen bewegender Kraft, Widerstand und Geschwindigkeit im Sinne des Aristoteles zu ermitteln. Das Bewegungsgesetz, das Bradwardine herleitete, war exponential. Seine Arbeit regte unmittelbar Nicole Oresme an, der zahlreiche Regeln für das Operieren mit gebrochenen Verhältnissen formulierte und schließlich sogar einen formalen Algorithmus für gebrochene Verhältnisse schuf, d.h. den Potenzbegriff auf positive gebrochene Exponenten erweiterte [32]. – Schließlich möchte ich noch die Lehre von den Formlatituden erwähnen [33], die ebenfalls im 14. Jahrhundert vor allem am Merton College, Oxford, und in Paris behandelt wurde. Dabei geht es um die Veränderung der aristotelischen Qualitäten (z.B. Wärme, Dichte, Farbtönung, Geschwindigkeit einer Bewegung). Diese Veränderung wird symbolisch durch Figuren dargestellt, wobei die Länge die Extensität angibt (meist die Zeit, in der etwa die Bewegung erfolgt) und die Breite die Intensität (d.h. die Größe der Qualität, etwa der Geschwindigkeit). Die Fläche der Figur ist ein Maß für den Wert der Qualität (im Falle der Bewegung: für den zurückgelegten Weg). Bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit Null ergibt sich als Figur ein Dreieck. Am Merton College hat man erkannt und bewiesen, daß der „Wert" (=Weg) dieser Bewegung gleich ist dem „Wert" einer gleichförmigen Bewegung, deren Geschwindigkeit gleich der Momentangeschwindigkeit in der Mitte des Zeitraums ist [34]. Aus diesem sogenannten Merton-Theorem folgt leicht das Bewegungsgesetz $s = \frac{a}{2}t^2$. Wir wissen heute, daß Galilei indirekt derartige Arbeiten der Merton-Schule kannte.

Andere Qualitätsänderungen, die man im 14. Jahrhundert behandelte, führten zu Erkenntnissen über den Wert von unendlichen Reihen.

Die genannten mathematischen Leistungen gehören sicher zu den Höhepunkten des mathematischen Schaffens im westlichen Mittelalter. Sie wurden angeregt durch die Beschäftigung mit Euklids *Elementen* und hängen eng zusammen mit Fragen, die sich beim Studium der aristotelischen Schriften und der Kommentare dazu ergaben. Selbstverständlich waren dies keine Probleme, die den „Mann auf der Straße" interessierten; vielmehr waren es Lehrinhalte, die im Universitätsunterricht in der Artistenfakultät behandelt wurden. Traktate von Oresme, Bradwardine und anderen werden nicht selten unter den Themen von Vorlesungen erwähnt, die im 14. und vor allem 15. Jahrhundert gehalten wurden; sie lassen sich im 14. Jahrhundert in Paris und Oxford und im 15. Jahrhundert an vielen Universitäten nachweisen, z. B. in Wien, Krakau und Leipzig. Auch die Anzahl der heute noch erhaltenen Handschriften zeigt, daß diese Arbeiten öfter kopiert wurden, als man es zunächst erwarten würde.

Schon bevor die arabische Wissenschaft den Westen erreichte, hatten Gelehrte des Mittelalters begonnen, zwischen der abstrakten Struktur eines Gegenstandes und seinen praktischen Anwendungen zu unterscheiden. Hugo von St. Victor trennte zu Beginn des 12. Jahrhunderts in seinem *Didascalicon* [35] nach antikem Vorbild die theoretischen von den praktischen Wissenschaften. Diese Unterteilung übertrug er auf die Geometrie. Bei ihr gibt es einen theoretischen, spekulativen Teil, der nur mit rationaler Betrachtungsweise arbeitet, und einen praktischen, aktiven Teil, der Instrumente benutzt. Die bisher genannten geometrischen Traktate gehören alle der ersten Gruppe an. Hugo selbst verfaßte eine *Practica geometriae*, die nicht nur vom Titel, sondern auch vom Inhalt her beispielhaft für ähnliche Abhandlungen der Folgezeit wurde [36]. In dieser Schrift behandelte er die Höhenmessung (*altimetria*), das Bestimmen von Flächen (*planimetria*) und von Körpern (*cosmimetria*). Die Geometrie, die uns hier entgegentritt, ähnelt sehr stark derjenigen, die die Agrimensoren lehrten. Sie setzt die Tradition der Römer fort und ist höchstens dadurch bemerkenswert, daß das von den Arabern kommende Astrolab für die Winkelmessung benutzt wird.

Es dürfte überraschen, daß die Tradition dieser Traktate ungebrochen und im wesentlichen, ohne arabisches Gedankengut aufzunehmen, bis zum 15./16. Jahrhundert sich fortsetzt. Verschiedene Quadranttraktate und die *Practica geometriae* des Dominicus de Clavasio gehören dieser Gruppe an. Erst in der ersten Hälfte des 14. Jahrhunderts beeinflußten Euklids *Elemente* den Stil und Inhalt von Traktaten zur praktischen Geometrie. Dies erkennt man gut an der Schrift des Dominicus de Clavasio (1346), die besonders verbreitet war [37]. Da alle Instrumente und Verfahren der praktischen Geometrie letztlich auf der Ähnlichkeit von Dreiecken und somit auf Proportionen beruhen, beginnt Dominicus mit vier *suppositiones* über Proportionen und über die Bestimmung unbekannter Stücke in einer Verhältnisgleichung. Auch bei den Vermessungsproblemen, die er behandelt, bemüht er sich um eine „wissenschaftliche" Einkleidung, wenn er einen Beweis nach Art des Euklid und unter Verwendung der bei Euklid üblichen logischen Strukturen bringt. Diese äußere Form erscheint allerdings etwas aufgesetzt, da die Inhalte nicht wesentlich neu sind. Fortschritte konnten erst erzielt werden, als die Trigonometrie verwertbar gemacht wurde, und dies geschah im Westen letztlich nicht vor dem 15. Jahrhundert.

Fassen wir einmal zusammen: Abgesehen von den theoretischen geometrischen Schriften, die offenbar vor allem im Universitätsunterricht benutzt wurden und erst nach der Übersetzertätigkeit des 11./12. Jahrhunderts wirksam werden konnten, gab es im Mittelalter eine Reihe von geometrischen Praktiken. Sie stehen in der Tradition der römischen Agrimensoren und haben fast nichts vom arabischen Wissen übernommen. Noch in Handschriften des späten 15. Jahrhunderts und sogar in Geometriebüchern des 16. und 17. Jahrhunderts werden Methoden dargestellt, die im wesentlichen mit den römischen Verfahren übereinstimmen. In einigen Vermessungstraktaten, die zahlenmäßig allerdings nicht sehr ins Gewicht fallen, findet man auch Einflüsse arabischer Schriften, die die Wissenschaft von der Größenvergleichung und ihren Methoden behandeln. Nur in Ausnahmefällen, etwa bei Leonardo von Pisa, hat man versucht, diese Wissenschaft in Darstellungen für Praktiker zu integrieren. Es bedarf allerdings noch weiterer Untersuchungen, um die Zusammenhänge besser zu ergründen; eine Geschichte der praktischen Geometrie ist bisher noch nicht geschrieben.

Bei der Einschätzung des Stellenwerts der praktischen Geometrie im Mittelalter darf man natürlich nicht nur vom Inhalt solcher Schriften ausgehen, die sich selbst als *Practica geometriae* bezeichnen, sondern muß auch Aussagen mittelalterlicher Autoren heranziehen, die sich mit der Einteilung der Wissenschaften befaßt haben. Man kann die Frage stellen, ob die „praktischen Geometrien" wirklich für praktische Bedürfnisse angewandt wurden [38]. Natürlich ist diese Frage schwer zu beantworten, weil das Wissen der Handwerker und Künstler meist mündlich weitergegeben wurde. Es ist klar, daß die Geometrien Teile enthalten, die für die Praxis verwertbar waren, z.B. über Metrologie, Entfernungsmessung, Bestimmung von Flächen, Herstellung und Gebrauch von Instrumenten. Daß sie wirklich verwertet wurden, ist wahrscheinlich. Vergleicht man nämlich Berichte darüber, wie vermessen wurde oder wie man Bauten errichtete, mit den Methoden, die in den praktischen Geometrien geschildert werden, so findet man Ähnlichkeiten. Die Vermesser etwa, die im 12. und 13. Jahrhundert z.B. in Belgien professionell tätig waren, gaben die Größe der Ländereien in Maßen an, die sich auch in praktischen Geometrien finden. Bei der Planung und beim Bau von Städten im Hochmittelalter benutzte man meist ein rechtwinkliges Raster für die Straßen und Bauten. Manchmal wurden Städte mit einer runden Umfassungsmauer errichtet, und es war wichtig, zu wissen, wie viele Häuser mit gleichem rechteckigem Grundriß hineinpaßten. Für beide Probleme lieferten die praktischen Geometrien Hilfen. Daß auch Architekten aus den praktischen Geometrien gelernt haben könnten, wird durch einen Hinweis im Skizzenbuch des Villard de Honnecourt (ca. 1225–1250) nahegelegt, wo von drei Figuren gesagt wird, sie seien „von der Geometrie genommen". Es handelt sich dabei um die Bestimmung der Höhe eines Turms, der Breite eines Flusses und eines Fensters, typische Probleme in den Abhandlungen zur praktischen Geometrie. So ist es gut möglich, daß auch Architekten diese Traktate kannten. Auf jeden Fall wurden sie für praktisch orientierte Leser geschrieben, und die Tatsache, daß sie auch und sogar stärker noch verbreitet wurden, als eine umfassendere Geometrie, nämlich die Euklids, zur Verfügung stand, zeigt, daß diese Traktate mindestens einen pädagogischen Zweck erfüllten.

Auf ein Problem möchte ich noch eingehen, das die Beziehungen zwischen Theorie und Praxis in der Geometrie des Mittelalters besonders gut wiedergibt: die Bestimmung des Faßinhalts [39]. In praktischen Geometrien des 10. bis 14. Jahrhunderts wird diese Aufgabe auf verschiedene Weisen gelöst, indem das Faß approximiert wird durch einen oder zwei Kegelstümpfe oder durch einen Zylinder, wobei im letzteren Falle der Grundkreis des Zylinders entweder ein Mittelwert aus den verschiedenen Kreisflächen oder gar nur der Grundkreis des Fasses ist. Die Tatsache, daß es kein einheitliches Verfahren gibt und das Problem nur eine Aufgabe innerhalb der Stereometrie ist, scheint darauf hinzudeuten, daß diese Frage damals nicht besonders interessierte. Dies änderte sich im 14. und vor allem im 15. Jahrhundert, als durch die Entwicklung des Städtewesens und des Handels auch der Weintransport an Bedeutung gewann. Sowohl für die Städte und Kleinstaaten, die durch den Zoll am Handel profitierten, als auch für den Händler und den Käufer bestand jetzt ein Bedürfnis, den Inhalt der Fässer bestimmen zu können. In den größeren Städten wurden Visierer öffentlich eingestellt, die neben ihrer eigentlichen Aufgabe, Fässer zu vermessen, auch Maße und Gewichte kontrollierten. Auf die soziale und rechtliche Stellung der Visierer will ich hier nicht eingehen. Es genügt der Hinweis, daß sie oft ausgebildete Handwerker waren, die keine theoretischen Kenntnisse in der Vermessungskunst besaßen. Zu ihrer Unterrichtung wurden Visiertraktate verfaßt, die seit der Mitte des 14. Jahrhunderts erwähnt werden und seit etwa 1450 erhalten sind. Mir sind um die 80 Handschriften derartiger Traktate aus dem 15./16. Jahrhundert und zahlreiche gedruckte Bücher zu diesem Thema aus dem 15.–17. Jahrhundert bekannt. Sie entstanden überwiegend in Süddeutschland und Österreich, im 16. Jahrhundert auch in belgischen Handelsstädten. Es sieht so aus, als ob die Faßmessung manchmal auch an Universitäten behandelt wurde (Erfurt, Wien, Krakau). Im allgemeinen wurden die Visiertraktate aber von Praktikern verfaßt, meist Rechenmeistern, die keine Beziehung zur Universität hatten. Auch die Verfahren lassen den Praxisbezug sofort erkennen: Die Messung wurde durch eine Visierrute mechanisiert, wobei man Quadrat- und Kubikrute unterschied. Bei der Quadratrute gibt es zwei Meßskalen, eine linear eingeteilte Längenskala und eine Tiefenskala, auf der die Quadratwurzeln der Maßzahlen aufgetragen sind. Das Volumen ist dann gleich dem Produkt der beiden Maßzahlen. Man benutzt also die Tatsache, daß das Zylindervolumen proportional zur Länge und zum Quadrat des Durchmessers ist; dies wird aber nicht gesagt. Vielmehr wird rezeptmäßig angegeben, wie die Skalen der Quadratrute anzufertigen sind und wie man dann das Faßvolumen bestimmt. Wohl in Österreich entwickelte man die Kubikrute, die nur eine Messung erforderlich macht: Man liest einfach die Maßzahl auf der Rute ab, wenn man sie durch das Spundloch schräg bis zum Boden steckt. Die Skala wird mit Hilfe einer Kubikwurzeltafel erstellt. Im Gegensatz zur Quadratrute ist die Kubikrute nur für Fässer einer bestimmten Form verwertbar. Die Kubikrute war für Kepler der Anlaß, sich Gedanken über die Verwendbarkeit des Verfahrens zu machen. Dies führte ihn zur Abfassung der *Stereometria doliorum* (1615), des ersten Versuchs einer wissenschaftlichen Behandlung der Faßmessung und gleichzeitig einer wichtigen Schrift auf dem Weg zur Infinitesimalrechnung.

Die Visierkunst ist ein typisches Beispiel für eine Disziplin, in der die Praxis der Theorie vorausging. Die Bedürfnisse des Handels machten es notwendig, Inhalte von Fässern schnell und einfach zu bestimmen. Man benötigte hierzu keine geometrischen Vorkenntnisse; insbesondere war es nicht nötig, die „schwierige" Kreisquadratur zu beherrschen. Dabei wurde ein mathematischer Kalkül durch ein rein mechanisches Verfahren ersetzt; man mußte nur noch ablesen oder schlimmstenfalls zwei Zahlen multiplizieren. Die Schwierigkeit verlagerte sich von dem Meßverfahren auf die Herstellung der Visierrute, doch wurden auch hier von Spezialisten rezeptmäßige Anleitungen gegeben. Diese Erscheinung ist für die Mathematik und andere Wissenszweige des 15.–17. Jahrhunderts typisch; man denke nur an den Proportionalzirkel und das Astrolab [40]. Über die Berechtigung des Vorgehens machte man sich offenbar zunächst wenig Gedanken. Erst Kepler versuchte fast 300 Jahre nach der frühesten Erwähnung von Visiertraktaten, die Faßmessung theoretisch zu begründen. Mit ihm beginnt eine neue, wissenschaftliche Ära der Doliometrie.

Ich möchte an dieser Stelle abbrechen in der Hoffnung, einen kleinen Einblick in einige Teile der mittelalterlichen Mathematik vermittelt zu haben, auf denen in der letzten Zeit neue Erkenntnisse gewonnen wurden. Um weiterzukommen, ist es meines Erachtens zunächst nötig, eine Reihe von Texten zu edieren, die noch nicht oder nur unzureichend im Druck zugänglich sind [41]. Erst, wenn dies geleistet ist, können weitergehende Betrachtungen sinnvoll angestellt werden.

## Literatur


[1] Ediert von G. Friedlein: Anicii Manlii Torquati Severini Boetii de institutione arithmetica libri duo, de institutione musica libri quinque, accedit geometria quae fertur Boetii, Leipzig 1867.

[2] Sapientia Salomonis 11, 21.

[3] Siehe hierzu den Artikel: Zahlensymbolik von E. Hellgardt in: Reallexikon der deutschen Literaturgeschichte, 2. Auflage, Bd. 4, S. 947–957, mit Hinweisen auf weiterführende Literatur.

[4] Editionen der wichtigsten Texte werden von Hanne Lange vorbereitet und sind zum Teil schon erschienen (Université de Copenhague. Cahiers de l'Institut du Moyen-Age Grec et Latin, Bd. 29, 32, 40, Kopenhagen 1978, 1979, 1981).

[5] *De arca Noe morali*, ediert in Migne, Patrologia Latina 176, Sp. 628–629.

[6] Ediert von G. Friedlein in: Zeitschrift für Mathematik und Physik 16, 1871, 42–79. 253–254 und in: Bullettino Boncompagni 4, 1871, 443–463.

[7] Sie bilden das 1. Kapitel von *De temporum ratione*, werden aber in vielen Handschriften als selbständige Abhandlung überliefert.

[8] Einen guten Überblick über die Geschichte der Osterberechnung bis zu Beda gibt C.W. Jones: Bedae opera de temporibus, Cambridge (Mass.) 1943, Einleitung.

[9] W. Bergmann: Innovationen im Quadrivium des 10. und 11. Jahrhunderts. Studien zur Einführung von Astrolab und Abakus im lateinischen Mittelalter, Stuttgart 1985.

[10] Das mittelalterliche Zahlenkampfspiel; erscheint in den Abhandlungen der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, philos.-hist. Klasse.

[11] Hermann von der Reichenau, um 1040; Lütticher Anonymus, um 1070; Odo von Tournai, um 1090; Regensburger Anonymus, um 1090; Fränkischer Kompilator, um 1100; Bayerischer Kompilator, um 1105.
[12] Alle genannten Texte sind bei Borst (Anm. 10) kritisch ediert.
[13] Ich plane eine Monographie über die Entwicklung des Spiels seit dem 13. Jahrhundert mit Edition der betreffenden Texte.
[14] Wolfenbüttel, HAB, Cod. Guelf. 1189 Helmst., f. 189v.
[15] Der Text ist jüngst, ebenso wie der Kommentar von Petrus de Dacia, von F. S. Pedersen neu ediert worden: Petri Philomenae de Dacia et Petri de S. Audomaro opera quadrivialia, Pars I, Kopenhagen 1983, S. 174–201 (Corpus philosophorum Danicorum medii aevi, X. 1).
[16] Einen Katalog aller bekannten italienischen Texte hat W. Van Egmond publiziert: Practical Mathematics in the Italian Renaissance: A Catalog of Italian Abbacus Manuscripts and Printed Books to 1600, Florenz 1980.
[17] Ediert von M. Folkerts: Die älteste mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache: Die Alkuin zugeschriebenen Propositiones ad acuendos iuvenes. Überlieferung, Inhalt, Kritische Edition, Wien 1978 (Österr. Akademie der Wiss., math.-nat. Klasse, Denkschriften, 116. Band, 6. Abhandlung).
[18] Die Typen in mathematischen Aufgabensammlungen wurden von K. Vogel systematisch geordnet und hinsichtlich ihrer Verbreitung aufgelistet. Siehe J. Tropfke: Geschichte der Elementarmathematik, 4. Auflage, Bd. 1, hg. v. K. Vogel / K. Reich / H. Gericke, Berlin / New York 1980, Abschnitt 4: Das angewandte Rechnen (S. 513–660).
[19] Die meisten Texte stehen immer noch nur in der Edition von F. Blume / K. Lachmann / A. Rudorff: Die Schriften der römischen Feldmesser, Band 1, Berlin 1848, zur Verfügung. Die mathematisch wichtige Schrift des Epaphroditus und Vitruvius Rufus ist ediert von N. Bubnov: Gerberti postea Silvestri II papae opera mathematica, Berlin 1899, S. 518–551.
[20] B. L. Ullman: Geometry in the mediaeval quadrivium, in: Studi di bibliografia e di storia in onore di Tammaro de Marinis, Bd. 4, Rom 1964, S. 263–285.
[21] Von Bubnov (Anm. 19), S. 48–97.
[22] Ediert von P. Tannery / M. Clerval: Une correspondance d'écolâtres du XIe siècle, in: Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Nationale et autres bibliothèques, 36, Paris 1901, S. 487–543; wiederabgedruckt in: Mémoires scientifiques, 5, Toulouse-Paris 1922, S. 229–303.
[23] Ediert von J. E. Hofmann: Zum Winkelstreit der rheinischen Scholastiker in der ersten Hälfte des 11. Jahrhunderts, in: Abhandlungen der Preuß. Akademie der Wiss., Jahrgang 1942, math.-nat. Klasse, Nr. 8, Berlin 1942.
[24] Ediert und analysiert von M. Folkerts / A. J. E. M. Smeur: A treatise on the squaring of the circle by Franco of Liège, of about 1050, in: Archives Internationales d'Histoire des Sciences, 26, 1976, S. 59–105. 225–253.
[25] an-Nairīzī; Aḥmad b. Jusuf, *Liber de arcubus similibus* und *De proportione et proportionalitate.*
[26] Banū Mūsā; *De curvis superficiebus.*
[27] Bd. 1, Madison 1964; Bd. 2–5, Philadelphia 1976–1984.
[28] Die mittelalterlichen lateinischen Euklidübersetzungen und -bearbeitungen werden gut charakterisiert von J. E. Murdoch: The Medieval Euclid: Salient Aspects of the Translations of the Elements by Adelard of Bath and Campanus of Novara, in: XII$^{e}$ Congrès International d'Histoire des Sciences. Colloques, Paris 1968, S. 67–94 (Révue de Synthèse, 89).
[29] Die kritische Ausgabe dieses Textes, die J. E. Murdoch vorbereitet hat, ist noch immer nicht erschienen.
[30] *Elemente*, Buch 3, Satz 16.
[31] Ediert von H. Lamar Crosby: Thomas of Bradwardine. His Tractatus de Proportionibus, Madison 1955.

[32] Siehe Nicole Oresme, De proportionibus proportionum and Ad pauca respicientes, ed. E. Grant, Madison / Milwaukee / London 1966.
[33] Andere Bezeichnungen: Änderung der Intensitäten; Konfiguration der Qualitäten. Die grundlegenden Arbeiten von Oresme zu dieser Frage wurden ediert und kommentiert von M. Clagett: Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions, Madison / Milwaukee / London 1968.
[34] Zu Formulierungen und Beweisen des Merton-Theorems siehe vor allem M. Clagett: The Science of Mechanics in the Middle Ages, Madison 1959, Kap. 5.
[35] Ediert von C.H. Buttimer: Didascalicon de studio legendi: A Critical Text, Washington 1939.
[36] Ediert von R. Baron, in: Osiris 12, 1956, 176–224, und in: Hugonis de Sancto Victore opera propaedeutica, Notre Dame 1966.
[37] Ediert von H.L.L. Busard: The Practica Geometriae of Dominicus de Clavasio, in: Archive for History of Exact Sciences, 2, 1965, 520–575.
[38] S. Victor: Practical Geometry and Practical Concerns, in: Practical Geometry in the High Middle Ages, Philadelphia 1979, S. 53–73.
[39] Siehe hierzu M. Folkerts: Die Entwicklung und Bedeutung der Visierkunst als Beispiel der praktischen Mathematik der frühen Neuzeit, in: Humanismus und Technik 18, 1974, 1–41.
[40] Zum Proportionalzirkel siehe I. Schneider: Der Proportionalzirkel, ein universelles Analogrecheninstrument der Vergangenheit, München 1970.
[41] Z.B. Johannes de Muris, *Quadripartitum numerorum* und *De arte mensurandi*; Jordanus Nemorarius, Arithmetik und Algorismus-Traktate.